Nom et Prénom :

Exam - BA5 - Electroacoustique

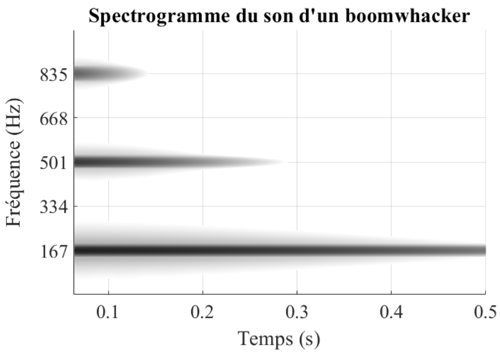
Hervé Lissek
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

24 janvier 2025 / 9h15 - 12h15 / INM 202

Notes préliminaires : Rédigez vos réponses au stylo à encre (pas de crayon papier) directement sur les feuilles d'énoncé (inscrivez votre nom et prénom dans l'en-tête de chaque page impaire). Vous avez droit à tous les documents écrits (livres, notes de cours, exercices et corrigés, etc.). Les calculatrices sont également autorisées (et recommandées). Seuls les moyens de communication (ordinateurs portables, tablettes, smartphones, etc.) doivent rester éteints durant tout l'examen. Prenez le temps de bien lire l'ensemble des énoncés avant de commencer à répondre.

Dans les exercices suivants, les valeurs suivantes de la masse volumique ρ_{air}, de la vitesse du son c_{air} et du coefficient de viscosité dynamique η_{air} de l'air seront considérées :
Données numériques : $\rho_{air} = 1.2$ kg.m^{-3}, $c_{air} = 343$ m.s^{-1}, $\eta_{air} = 1.810.10^{-5}$ kg.m^{-1}.s^{-1}.

Questions (1 point) - utilisez le verso pour justifier les réponses Q2 à Q5

Q1 (0.2 pt)	Où se situent les cellules ciliées les plus sensibles à 100 Hz ? ☐ à la base de la cochlée ☐ au centre de la cochlée ☒ à l'apex de la cochlée
Q2 (0.2 pt)	Laquelle de ces propositions qualifie le mieux l'intervalle fréquentiel [100Hz - 500Hz] ? ☒ 7 tiers-d'octave ☐ 2 octaves ☐ 2,5 octaves
Q3 (0.2 pt)	La fréquence de résonance d'une bouteille vide de volume inconnu est $f_1 = 270$ Hz. Lorsqu'on verse 20 cl d'eau dans la bouteille, on mesure une nouvelle fréquence de résonance $f_2 = 430$ Hz. Quel est le volume (à vide) de la bouteille ? ☐ 20 cl ☐ 25 cl ☒ 33 cl
Q4 (0.2 pt)	On mesure le niveau de pression acoustique $L_p(2\text{m}) = 84$ dB (re. 20 μPa) généré à 2 m d'un haut-parleur, en salle anéchoïque. Quel est le niveau à une distance de 5 m du haut-parleur ? ☐ 70 dB (re. 20 μPa) ☒ 76 dB (re. 20 μPa) ☐ 82 dB (re. 20 μPa)
Q5 (0.2 pt)	On mesure le spectrogramme d'un boomwhacker, qui présente des fréquences de résonance à 167 Hz, 501Hz et 835 Hz. Quelle est approximativement la longueur du boomwhacker ?  ☐ 25 cm ☒ 50 cm ☐ 100 cm

Q2 : Une octave correspond à un intervalle $\log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \log_2(2) = 1$

Un tiers d'octave —— " —— $\log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \log_2\left(2^{1/3}\right) = \frac{1}{3}$

Or : $\log_2\left(\frac{f_2 = 500}{f_1 = 100}\right) = \log_2(5) = 2{,}3$

et $\cdot \log_2\left(2^{7/3}\right) = \frac{7}{3} \simeq 2{,}3 \Rightarrow$ 7 tiers-d'octave

---

Q3. La fréquence de résonance d'un résonateur de Helmholtz de volume V, avec un goulot de largeur l et section s vaut

$$f = \frac{c_{air}}{2\pi}\sqrt{\frac{s}{l \times V}}$$

On ne connait pas V_0 le volume à vide, mais on peut écrire $f_1 = \frac{c_{air}}{2\pi}\sqrt{\frac{s}{l \times V_0}}$

Quand on remplit la bouteille d'un volume V_{eau}, le volume d'air libre devient $(V_0 - V_{eau})$, et le goulot a toujours les mêmes dimensions l et s. Donc la nouvelle fréquence de résonance est

$$f_2 = \frac{c_{air}}{2\pi}\sqrt{\frac{s}{l \times (V_0 - V_{eau})}}$$

On peut donc calculer V_0 comme. $V_0 = \dfrac{V_{eau}}{1 - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2} = 33\ cl$

Q4 $L_p(r) = L_{P_a} - 20\log(r) - 11 \Rightarrow L_p(r = 5m) = L_p(r = 2m) - 20\log\left(\frac{5}{2}\right)$
$= 76\ dB$

Q5. Le boomwhacker présente des fréquences de résonance impaires : $\frac{f_1}{f_0} = 3$, $\frac{f_2}{f_0} = 5$, $\frac{f_3}{f_0} = 7$

$\Rightarrow$ Cela signifie que le boomwhacker est fermé à une extrémité et ouvert à l'autre

$\rightarrow$ résonateur quart-d'onde

$\hookrightarrow f_n = (2n+1)\dfrac{c_{air}}{4L}$ $\longrightarrow$ (ici on ne connait pas le rayon du boomwhacker, mais on supposera que la "correction de bout" est petite devant L)

Donc $f_0 = \dfrac{c_{air}}{4L}$ d'où $L \simeq \dfrac{c_{air}}{4 \cdot f_0} = \dfrac{343}{4 \times 167} = 51{,}3 \simeq 50\ cm$ (incluant la correction de bout)

Nom et Prénom :

Exercice 1 : (3 points)

Nous disposons d'un haut-parleur dont nous cherchons à calculer les paramètres en petits signaux. A ce stade, le seul paramètre en petit signaux que nous pouvons estimer est la résistance dc que l'on mesure avec un simple ohmmètre, donnant la valeur$R_e = 5.6\Omega$.
Dans ce qui suit, nous considèrerons que la masse mobile M_{ms} du haut-parleur inclut la masse de rayonnement totale. Afin d'estimer les paramètres en petits signaux du haut-parleur, nous effectuons 3 mesures successives de l'impédance électrique d'entrée du haut-parleur Z_{hp}, en excitant le haut-parleur avec un bruit blanc et en mesurant simultanément la tension électrique d'entrée et le courant électrique circulant dans la bobine, dans les 3 conditions suivantes :

1. une mesure sur baffle CEI (Commission Electrotechnique Internationale),
2. une mesure dans une enceinte close de volume V_b=15 l,
3. une mesure sur baffle CEI avec une masse additionnelle M_{add}=11 g.

La Figure **??** représente l'amplitude de l'impédance électrique $|Z_{hp,i}|$ dans les 3 conditions $(i = 1, 2, 3)$ définies précédemment. Nous observons pour chacune un maximum $Z_{0,i} = \max(|Z_{hp,i}|) = 50{,}4\ \Omega$, dont la valeur est la même dans les 3 conditions de mesure, mais à des fréquences différentes que l'on notera f_s (sur écran infini), f_c (en enceinte close) et f_m (avec masse additionnelle).

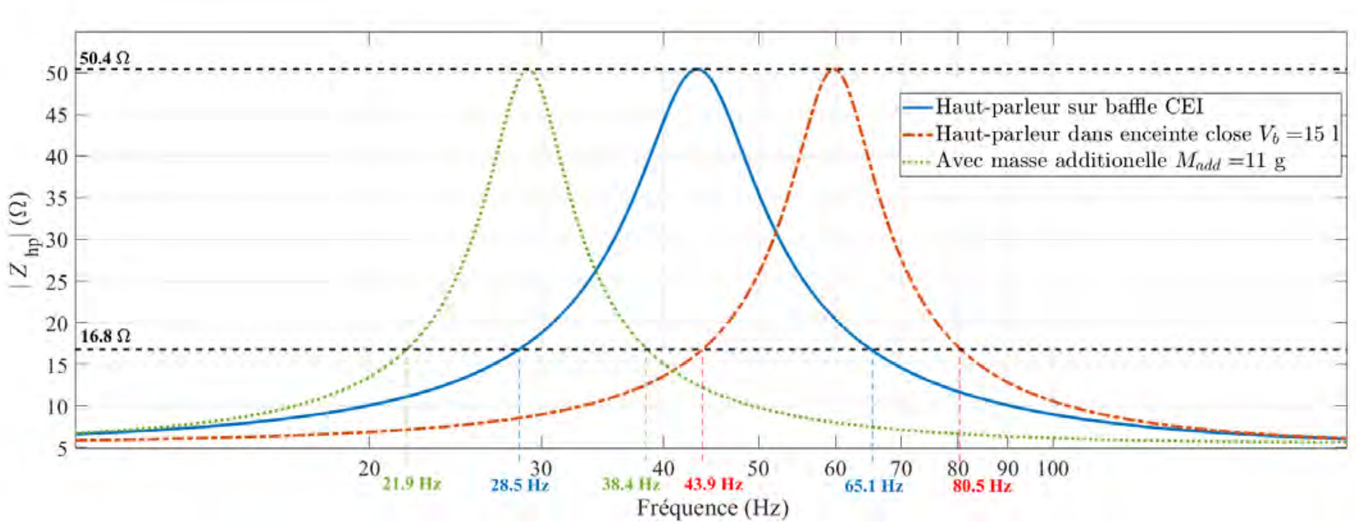


FIGURE 1 – Impédance électrique du haut-parleur (trait plein bleu : sur écran infini ; trait discontinu rouge : dans une enceinte de volume V_b=15 l, sans masse additionnelle ; pointillés verts : sur écran infini, avec masse additionnelle $M_{add} = 11$ g

A. **Mesure sur baffle CEI**

La première mesure $Z_{hp,1}$ sur baffle CEI donne la courbe en trait plein bleu de la Figure 1. Pour déterminer la fréquence f_s, nous choisissons une valeur d'impédance intermédiaire $Z_1 = 16{,}8\ \Omega \in [1, Z_1]$ et identifions 2 fréquences f_{s-} =28,5 Hz et f_{s+}=65,1 Hz pour lesquelles $|Z_{hp,1}(f_{s\pm})| = Z_1$.

1. A quoi correspond f_s ? Exprimez f_s en fonction de la masse mobile M_{ms} et de la compliance mécanique C_{ms} du haut-parleur.

f_s est la fréquence de résonance de l'équipement mobile du haut-parleur

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{M_{ms}C_{ms}}}$$

2. Rappelez l'expression de f_s en fonction de f_{s-} et f_{s+} et calculez sa valeur numérique.

$$f_s = \sqrt{f_{s-}f_{s+}} = \sqrt{28{,}5 \times 65{,}1} = 43{,}1 \text{ Hz}$$

3. Rappelez l'expression des facteurs de qualité mécanique Q_{ms}, électrique Q_{es} et total Q_{ts} du haut-parleur en fonction de $Z0$, R_e, f_s, f_{s-} et f_{s+} et calculez leurs valeurs numériques.

Nous voyons que $Z_1 = 16{,}8 = \sqrt{\frac{50{,}4}{56}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Re}} \simeq \sqrt{Z_0}$. D'après le cours, dans ce cas

- $Q_{ms} = \frac{f_s}{f_{s+} - f_{s-}} \cdot \sqrt{\frac{Z_0}{Re}} = 3{,}53$ $\left(Q_{ms} = \frac{1}{2\pi f_s R_{as} C_{as}}\right)$
- $Q_{es} = \frac{Q_{ms}}{\frac{Z_0}{Re} - 1} = 0{,}44$ $\left(Q_{es} = \frac{1}{2\pi f_s R_{ae} C_{as}}\right)$
- $Q_{ts} = \frac{Q_{ms}\,Q_{es}}{Q_{ms} + Q_{es}} = 0{,}39$ $\left(Q_{ts} = \frac{1}{2\pi f_s (R_{as} + R_{ae}) C_{as}}\right)$

Nom et Prénom :

B. Mesure sur enceinte close

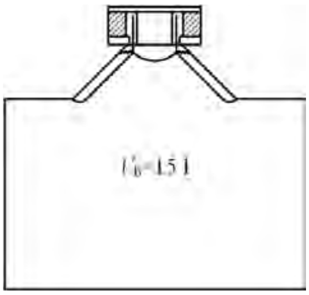


FIGURE 2 – Montage sur une enceinte

Nous faisons ensuite une mesure d'impédance électrique avec le haut-parleur monté sur une enceinte close de volume $V_b = 15$ l. Le montage est effectué selon le schéma de la Figure 2.
La courbe en trait discontinu rouge de la Figure 1 représente l'amplitude de l'impédance électrique du haut-parleur dans ces conditions. De manière similaire à l'exercice précédent, nous observons deux fréquences $f_{c-} = 43{,}9$ Hz et $f_{c+} = 80.5$ Hz pour lesquelles $|Z_{hp,2}(f_{c\pm})| = Z_1$.

1. Calculez les valeurs de la fréquence de résonance f_c et du facteur de qualité électrique Q_{ec} du haut-parleur en enceinte close de volume $V_b = 15$ l.

De la même manière que précédemment $f_c = \sqrt{f_{c-} \cdot f_{c+}} = \sqrt{43{,}9 \times 80{,}5} = 59{,}4$ Hz

$$Q_{mc} = \frac{f_c}{f_{c+} - f_{c-}} \sqrt{\frac{Z_0}{R_e}} = 4{,}87$$

$$\Rightarrow Q_{ec} = \frac{Q_{mc}}{\frac{Z_0}{R_e} - 1} = 0{,}61$$

2. Rappelez l'expression de la compliance mécanique C_{ab} équivalente au volume V_b de l'enceinte close en fonction de V_b, ρ_{air} et c_{air}.

$$C_{ab} = \frac{V_b}{\rho_{air} c_{air}^2}$$

3. Si on définit $\alpha = \frac{C_{as}}{C_{ab}}$ le rapport de compliance, retrouvez la valeur du volume d'air V_{as} équivalent à la suspension du haut-parleur.

$\alpha = \frac{C_{as}}{C_{ab}} = \frac{V_{as}}{V_b}$ par définition $\Rightarrow V_{as} = \alpha V_b$

On montre que $Q_{ec} = \frac{1}{2\pi f_c \cdot R_{ae} C_{ac}} \Rightarrow f_c \cdot Q_{ec} = \frac{1}{2\pi \cdot R_{ae} C_{ac}}$

or $C_{ac} = \frac{C_{as} \times C_{ab}}{C_{as} + C_{ab}} = \frac{C_{as}}{1+\alpha} \Rightarrow f_c \cdot Q_{ec} = \frac{1}{2\pi R_{ae} C_{as}}(1+\alpha)$

De même $Q_{es} = \frac{1}{2\pi f_s R_{ae} C_{as}} \Rightarrow f_s Q_{es} = \frac{1}{2\pi R_{ae} C_{as}}$

Donc $f_c Q_{ec} = (1+\alpha) f_s Q_{es}$, d'où $\alpha = \frac{f_c Q_{ec}}{f_s Q_{es}} - 1 = 0{,}9$

$\Rightarrow V_{as} = \alpha V_b = 13{,}5$ ℓ

C. **Mesure avec masse additionelle**

Nous faisons une troisième mesure d'impédance électrique en collant une masse additionnelle M_{add} =11 g sur la membrane du haut-parleur, à nouveau monté sur le baffle CEI. La mesure donne la courbe en pointillés verts de la Figure 1. Nous observons les deux fréquences f_{m-} =21,9 Hz et f_{m+} = 38,4 Hz pour lesquelles $|Z_{hp,3}(f_{m\pm})| = Z_1$.

1. Trouvez la masse mobile M_{ms}, la compliance mécanique C_{ms}, ainsi que la résistance mécanique R_{ms}, du haut-parleur.

D'après la courbe, on déduit $f_m = \sqrt{f_{m+} \cdot f_{m-}} \simeq 29{,}0$ Hz

Or $f_m = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(M_{ms}+M_{add}) \cdot C_{ms}}} \Rightarrow \dfrac{f_s^2}{f_m^2} = \dfrac{M_{ms}+M_{add}}{M_{ms}} = 1 + \dfrac{M_{add}}{M_{ms}}$

$\Rightarrow M_{ms} = \dfrac{M_{add}}{\left(\frac{f_s}{f_m}\right)^2 - 1} = 9$ g

$\Rightarrow C_{ms} = \dfrac{1}{4\pi^2 f_s^2 M_{ms}} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m N^{-1}

Enfin $R_{ms} = \dfrac{1}{2\pi f_s C_{ms} Q_{ms}} \simeq 0{,}7$ N s m^{-1}

2. Trouvez alors la surface effective S_d du haut-parleur.

$V_{as} = \rho_{air} C_{air}^2 \cdot S_d^2 C_{ms} \Rightarrow S_d = \dfrac{1}{C_{air}}\sqrt{\dfrac{V_{as}}{\rho_{air} C_{ms}}} = 79{,}8$ cm^2

3. Retrouvez finalement la valeur du facteur de force $B\ell$ du haut-parleur.

$Q_{es} = \dfrac{1}{2\pi f_s \underbrace{\frac{(Bl)^2}{R_e}}_{R_{me}} C_{ms}} \Rightarrow B\ell = \sqrt{\dfrac{R_e}{2\pi f_s \cdot Q_{es} C_{ms}}} = 5{,}6$ T m

Nom et Prénom :

Exercice 2 : Enceinte Bass-reflex à radiateur passif (2 points)

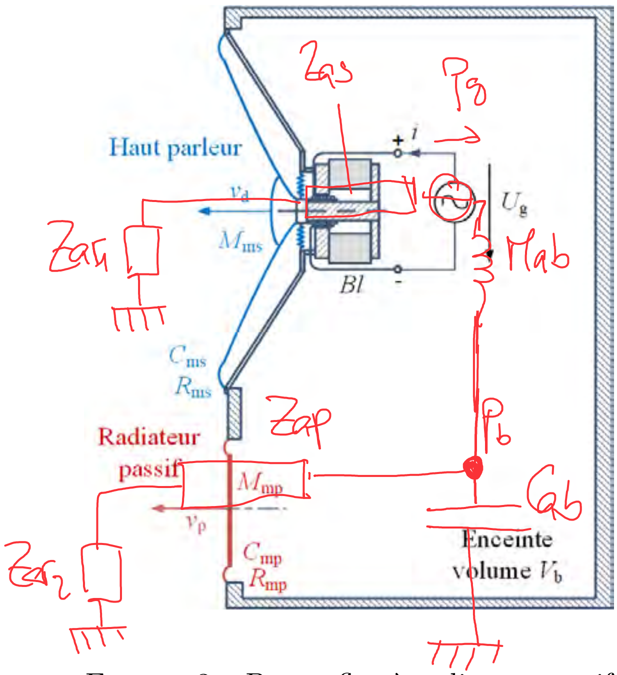


FIGURE 3 – Bass-reflex à radiateur passif

Un haut-parleur de paramètres :

- électriques : R_e, L_e,
- facteur de force $B\ell$,
- mécaniques : R_{ms}, C_{ms}, M_{ms},
- surface effective S_d,

alimenté par une source de tension électrique U_g (supposée idéale) est monté sur une enceinte de volume V_b.

Un radiateur passif constitué d'un piston circulaire rigide de surface S_p, de masse M_{mp} suspendu sur son pourtour par une suspension annulaire de compliance C_{mp} et de résistance mécanique R_{mp}, est également fixé sur la même face de l'enceinte que le haut-parleur. On désigne v_d la vitesse vibratoire du haut-parleur et v_p celle du radiateur passif.

Dans ce qui suit, nous négligerons les pertes acoustiques dans l'enceinte (pas de matériau poreux, ni de fuites). Par ailleurs, nous limiterons l'étude du système aux basses-fréquences.

1. Dessinez le schéma **acoustique** (pressions p_i et débits volumiques q_i) du système constitué du haut-parleur et de l'enceinte avec radiateur passif, en rappelant l'expression de tous les composants acoustiques du circuit en fonction des paramètres du haut-parleur.

Dans un premier temps, on definit la masse de rayonnement du haut-parleur, ainsi que la masse de décan-tuite

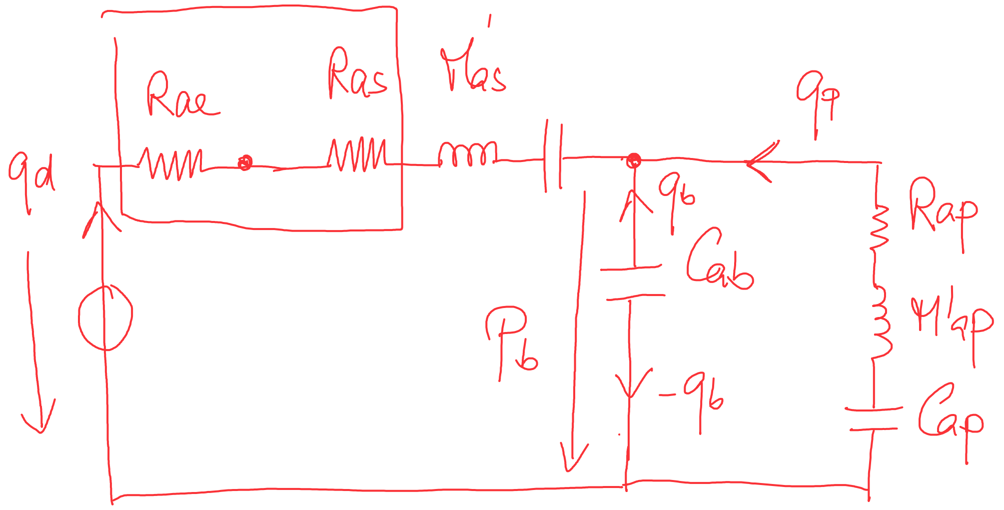
$$M_{ab_1} = M_{ar_1} = \frac{8}{3\pi}\rho_{air}\frac{a_d}{S_d} \quad \text{où} \quad a_d = \sqrt{\frac{S_d}{\pi}}$$

De même pour le radiateur passif

$$M_{ab_2} = M_{ar_2} = \frac{8}{3\pi}\rho_{air}\frac{a_p}{S_p} \quad \text{où} \quad a_p = \sqrt{\frac{S_p}{\pi}}$$

Les masses acoustiques du haut-parleur (et du radiateur passif) incluerant désormais ces masses supplémentaires

$$R_{at} = R_{ae} + R_{as}$$



$$Z_{ar_1} = j\omega M_{ar_1} + R_{ar_1}$$
$$Z_{ar_2} = j\omega M_{ar_2} + R_{ar_2}$$

$$P_g = \frac{Bl}{S_d R_e}$$

$$R_{ae} = \frac{(Bl)^2}{S_d^2 R_e}$$

$$R_{as} = \frac{R_{ms}}{S_d^2}$$

$$M'_{as} = \frac{M_{ms}}{S_d^2} + M_{ar_1} + M_{ab_1}$$

$$C_{as} = C_{ms} \cdot S_d^2$$

$$C_{ab} = \frac{V_b}{\rho_{air} c_{air}^2}$$

$$R_{ap} = \frac{R_{mp}}{S_p^2}$$

$$M'_{ap} = \frac{M_{mp}}{S_p^2} + M_{ar_2} + M_{ab_2}$$

$$C_{ap} = C_{mp} \cdot S_p^2$$

$$q_d = S_d \, U_d$$

$$q_p = S_p \, U_p$$

Nom et Prénom :

2. En négligeant la résistance R_{mp} et en vous inspirant d'un exemple vu en cours, **démontrez** que la pression $p_{r=1\mathrm{m}}(j\omega)$ à 1m du bass-reflex à radiateur passif est de la forme :

$$p_{\mathrm{r=1m}}(j\omega) = p_m \frac{a_4.(j\omega)^4 + a_2.(j\omega)^2}{b_4.(j\omega)^4 + b_3.(j\omega)^3 + b_2.(j\omega)^2 + b_1.(j\omega) + b_0},$$

où p_m ainsi que les coefficients a_i et b_j sont des constantes que vous exprimerez en fonction des composants acoustiques de la question précédente ?

Quelle fonction effectue le système bass-reflex à radiateur passif ?

Si on assimile le haut parleur à un monopole dont le debit sortant est $q_d + q_p = -q_b$

la pression à la distance r s'écrit $p(r,j\omega) = j\frac{Z_c k\,\underbrace{(q_d+q_p)}_{-q_b}\, e^{-jkr}}{4\pi r}$ (ou $2\pi r$ si écran diffractant)

Donc $P_{r=1m}(j\omega) = \frac{-\rho\omega q_b}{4\pi}$

Il faut exprimer q_b en fonction des paramètres du haut-parleur. Sur le circuit on peut voir

$-q_b = j\omega C_{ab} P_b$ et $P_b = \frac{Z_{ab}}{Z_{ab}+Z_{as}} P_g$ où $Z_{as} = j\omega M'_{as} + R_{at} + \frac{1}{j\omega C_{as}}$

et $Z_{ab} = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 + 1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2 j\omega C_{ab} + j\omega(C_{ab}+C_{ap})}$ (avec $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{M'_{ap}C_{ap}}}$ la freq. de resonance du radiateur passif)

$$-q_b = j\omega C_{ab} P_g \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2+1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2 j\omega C_{ab} + j\omega(C_{ab}+C_{ap})} \cdot \frac{1}{\frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2-1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2 j\omega C_{ab} + j\omega(C_{ab}+C_{ap})} + \left(j\omega M'_{as} + R_{at} + \frac{1}{j\omega C_{as}}\right)}$$

$$= j\omega C_{ab} P_g \frac{\left(\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2+1\right) \cdot j\omega C_{as}}{j\omega C_{as}\left(\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2-1\right) + \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2 j\omega C_{ab} + j\omega(C_{ab}+C_{ap})\right)\left(\left(\frac{j\omega}{\omega_s}\right)^2 + \frac{1}{Q_{ts}}\left(\frac{j\omega}{\omega_s}\right)+1\right)}$$

$Q_{ts} = \frac{1}{\omega_s R_{at} C_{as}}$ $\qquad \omega_s = \frac{1}{\sqrt{M'_{as}C_{as}}}$

$$= \frac{Bl}{S_d R_e} \frac{(j\omega)^{2} C_{ab} C_{as} \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2 + 1 \right)}{(j\omega)^{4\,\cancel{5}} \frac{C_{ab}}{\omega_p^2 \omega_s^2} + (j\omega)^{3\,\cancel{4}} \frac{C_{ab}}{\omega_p^2 Q_{ts} \omega_s} + (j\omega)^{2\,\cancel{3}} \left[\frac{C_{ab}}{\omega_p^2} + \frac{C_{ab}+C_{ap}}{\omega_s^2} + \frac{C_{as}}{\omega_p^2} \right] + (j\omega)^{\cancel{1}2} \frac{C_{ab}+C_{ap}}{Q_{ts} \omega_s} + \cancel{j\omega}(C_{ab}+C_{ap}+C_{as})}$$

On divise le numérateur et le dénominateur par $j\omega C_{ab}$

$\Downarrow$

Ainsi :

$$P_{1m}(j\omega) = -j \frac{\rho_{air}}{4\pi} \frac{Bl}{S_d R_e} \frac{C_{as} \omega_s^2 \left(\frac{(j\omega)^4}{\omega_p^2 \omega_s^2} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_s^2} \right)}{\frac{(j\omega)^4}{\omega_p^2 \omega_s^2} + \frac{(j\omega)^3}{\omega_p^2 Q_{ts} \omega_s} + (j\omega)^2 \left[\frac{1+\frac{C_{as}}{C_{ab}}}{\omega_p^2} + \frac{1+\frac{C_{ap}}{C_{ab}}}{\omega_s^2} \right] + (j\omega) \frac{1+\frac{C_{ap}}{C_{ab}}}{Q_{ts} \omega_s} + \left(1 + \frac{C_{ab}}{C_{ab}} + \frac{C_{as}}{C_{ab}}\right)}$$

$a_4 = \frac{1}{\omega_p^2 \omega_s^2}$

$a_2 = \frac{1}{\omega_s^2}$

$P_m = -j \frac{\rho_{air}}{4\pi} \frac{Bl}{S_d R_e} C_{as} \omega_s^2$

$b_4 = \frac{1}{\omega_p^2 \omega_s^2}$

$b_3 = \frac{1}{\omega_p^2 Q_{ts} \omega_s}$

$b_2 = \frac{1+\alpha_s}{\omega_p^2} + \frac{1+\alpha_p}{\omega_s^2}$

$b_1 = \frac{1+\alpha_p}{Q_{ts} \omega_s}$

$b_0 = 1 + \alpha_p + \alpha_s$

$\left(\alpha_s = \frac{C_{as}}{C_{ab}} \quad \alpha_p = \frac{C_{ap}}{C_{ab}} \right)$

$\Downarrow$

Facteurs de compliance

C'est un filtre passe-haut du 4e ordre. Cela permet d'avoir une coupure basse-fréquence plus basse, comme un bass-reflex, mais de manière plus compacte (l'évent du bass-reflex doit être assez long pour que la résonance de Helmholtz soit assez basse).